**V103: Biegung elastischer Stäbe**

Protokoll zum Versuch des Anfängerpraktikums für Medizinphysiker

Technische Universität Dortmund

**Michelle Wendler & Phuong Quynh Ngo**

Gruppe 4

Versuchsdatum: 22.11.2019

Protokoll verfasst am: 28.11.2019

**michelle.wendler@tu-dortmund.de**

**phuong-quynh.ngo@tu-dortmund.de**

**1 Ziel des Versuchs**

Mit Hilfe von Biegungsmessungen elastischer Stäbe soll der Elastizitätsmodul verschiedener Metalle und Legierungen bestimmt werden. Die errechneten Elastizitätsmodule werden anschließend mit Literaturwerten verglichen.

**2 Theorie**

Körper können durch Kräfteeinwirkungen auf ihre Oberfläche verformt werden. Diese Kräfteeinwirkungen nennt man Spannung. Spannung kann senkrecht, als Normalspannung σ, oder oberflächenparallel, als Tangential- oder Schubspannung, auf die Oberfläche des Körpers wirken. Bei einer (kleinen) relativen Längenänderung ist diese proportional zur Kraft, in dem Fall die Normalspannung σ, welche diese bewirkt. Das Hooke’sche Gesetz

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 1 ) |

mit dem Proportionalitätsfaktor , den man als Elastizitätsmodul bezeichnet, beschreibt den linearen Zusammenhang beider Größen.

Da einige Materialien nur sehr kleine Längenänderungen gegenüber Dehnung oder Stauchung aufweisen, welche ohne besondere Messvorrichtungen schwer zu messen sind, wird der Elastizitätsmodul in diesem Versuch über Biegung bestimmt.

**2.1 Biegung bei einseitiger Einspannung**

Durch Biegung erfährt ein Körper (hier homogener Stab) gleichzeitig Dehnung und Stauchung. Bei einseitiger Einspannung greift eine Kraft am freien Ende des Stabes, womit sich eine Durchbiegung ergibt. Diese Funktion gibt die Auslenkung des Stabes von der Normallage in Abhängigkeit der Entfernung zur Einspannung an. wird über eine Drehmomentgleichung bestimmt. Im Gleichgewichtszustand stehen sich das durch erzeugte äußere Drehmoment und diesem entgegengerichteten, aber betragsmäßig gleichem, inneren Drehmoment gegenüber. wird durch Normalspannungen, genauer von Zugspannungen in den oberen und Druckspannungen in den unteren Schichten des Stabes, erzeugt. Zwischen diesen Schichten liegt eine Spannungsfreie Fläche, welche bei der Biegung keine Längenänderung erfährt, die sogenannte „neutrale Faser“.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 2 ) |
|  |  | ( 3 ) |

Hierbei ist die Ursprüngliche Länge des Stabes außerhalb der Befestigung, der Stabquerschnitt und der Abstand des Flächenelementes von der neutralen Faser. Die

Normalspannung wird über das Hooke’sche Gesetz bestimmt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 4 ) |

Für die einseitige Einspannung ergibt sich final die Formel

für die Auslenkung. bezeichnet hierbei die Entfernung zwischen Messpunkt und Befestigung und das Flächenträgheitsmoment, welches mit der Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 5 ) |

berechnet wird.

**2.2 Biegung bei beidseitiger Auflage**

Bei beidseitiger Auflage des Stabes und Krafteinwirkung in der Mitte kann ebenfalls eine Durchbiegung beobachtet werden. Diese wird über die Formeln

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 6 ) |
|  |  | ( 7 ) |

berechnet.

**3 Versuchsbeschreibung und -durchführung**

**3.1 einseitige Einspannung**

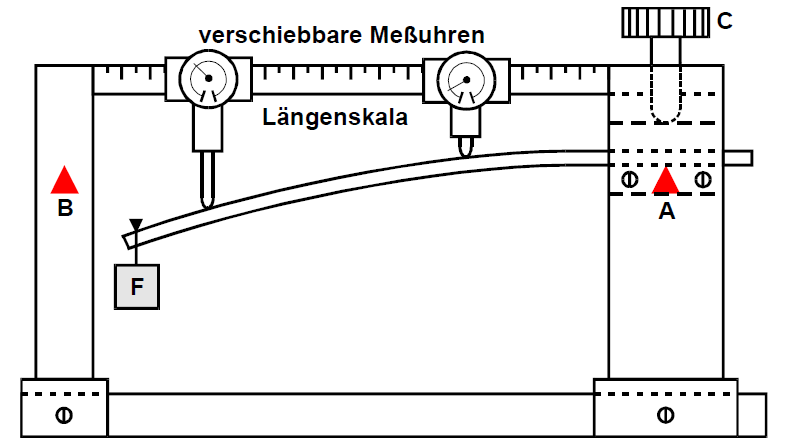
[[1]](#footnote-1)

Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Versuchs [1]

Bei der einseitigen Einspannung wird wie in Abbildung 1 der Stab bei A mit Hilfe der Spannvorrichtung C befestigt. Das Gewicht F wird an das andere Ende des Stabes gehängt, um eine Durchbiegung hervorzurufen. Die Durchbiegung wird durch horizontal verschiebbare Messuhren an verschiedenen Stellen gemessen. Da die Stäbe von vorne rein nicht exakt gerade sind, werden zunächst die Uhren, bevor man F anhängt, an die jeweilige Messtelle geschoben und auf Null gestellt. Die Messtellen und die jeweiligen Auslenkungen werden gemessen und notiert, sodass man 10 Wertepaare erhält. Zudem wird die Masse des Gewichtes F, die Länge des Stabes außerhalb von A und der Durchmesser , bzw. die Höhe , des Stabes ermittelt.

**3.2 beidseitige Einspannung**

Bei der beidseitigen Einspannung werden beide Enden des Stabes jeweils bei A und B eingespannt, bzw. aufgelegt, und das Gewicht F wird in die Mitte, anstatt an das Ende des Stabes, gehängt. Bei der Messung der Auslenkung geht man hier analog zur Messung bei der einseitigen Einspannung vor, jedoch sollte man seine Messpunkte so wählen, dass die Messuhren das in der Mitte hängende Gewicht nicht verschieben. Nun werden rechts und links von der Mitte 5 Messpunkte gewählt, sodass man hier ebenfalls 10 Wertepaare erhält.

Ebenfalls wird hier die Masse des Gewichtes F, die Länge des Stabes zwischen A und B und der Durchmesser , bzw. die Höhe des Stabes ermittelt.

**4 Auswertung**

**4.1 runder silberner Stab, einseitige Einspannung**

**Tabelle 1:** runder silberner Stab, einseitige Einspannung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 40 | 0,22 | 0,77 |
| 80 | 0,69 | 3,0 |
| 120 | 1,33 | 6,55 |
| 160 | 2,48 | 11,31 |
| 200 | 3,5 | 17,13 |
| 240 | 4,81 | 23,90 |
| 280 | 6,07 | 31,49 |
| 320 | 7,35 | 39,77 |
| 360 | 8,77 | 48,60 |
| 400 | 10,34 | 57,87 |

Die Länge und die Durchmesser des Stabes betragen:

0,495 m

0,01 m

Das Elastizitätsmodul wird über eine lineare Regression, welche mit Python durchgeführt und mit Excel geplottet wird, bestimmt, indem gegen aufgetragen wird.

Abbildung 2: runder silberner Stab, einseitige Einspannung

Mit der allgemeinen Geradengleichung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 8 ) |

und ihren, mit Hilfe der linearen Regression Ausgerechneten, Werten für und

m

lässt sich der Elastizitätsmodul über einen Vergleich mit Formel (4) über

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 9 ) |

berechnen.

Das Flächenträgheitsmoment [2] beträgt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 10 ) |

Die Masse des Gewichts und die Gravitationsbeschleunigung betragen:

= 1,4079 kg

Somit ergibt sich als Elastizitätsmodul

Der Fehler für wird dabei über die Gauß’sche Fehlerfortpflanzung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 11 ) |

berechnet.

Es wird aufgrund der Farbe und der Beschaffenheit des Stabes davon ausgegangen, dass er aus Aluminium ist. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls [3] für Aluminium beträgt

.

**4.2 eckiger goldener Stab, einseitige Einspannung**

**Tabelle 2:** eckiger goldener Stab, einseitige Einspannung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 40 | 0,17 | 0,77 |
| 80 | 0,65 | 3,0 |
| 120 | 1,255 | 6,55 |
| 160 | 2,05 | 11,31 |
| 200 | 3,03 | 17,13 |
| 240 | 4,19 | 23,90 |
| 280 | 5,455 | 31,49 |
| 320 | 6,78 | 39,77 |
| 360 | 8,09 | 48,60 |
| 400 | 9,53 | 57,87 |

Die Länge und die Höhe des Stabes betragen:

m

m

Das Elastizitätsmodul wird hier ebenfalls über eine lineare Regression, welche mit Python durchgeführt und mit Excel geplottet wird, bestimmt, indem gegen aufgetragen wird.

Abbildung 3: eckiger goldener Stab, einseitige Einspannung

Mit der allgemeinen Geradengleichung (8) und ihren, mit Hilfe der linearen Regression Ausgerechneten, Werten für und

m

lässt sich der Elastizitätsmodul über einen Vergleich mit Formel (4) über Formel (9) berechnen.

Das Flächenträgheitsmoment [2] beträgt hier:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 12 ) |

Die Masse des Gewichts und die Gravitationsbeschleunigung betragen:

= 2,5793 kg

Somit ergibt sich als Elastizitätsmodul

.

Der Fehler für wird dabei über die Gauß’sche Fehlerfortpflanzung (11) bestimmt.

Es wird aufgrund der Farbe und der Beschaffenheit des Stabes davon ausgegangen, dass er aus Gold ist. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls [3] für Gold beträgt:

82.

**4.3 runder silberner Stab, beidseitige Einspannung**

Bei der beidseitigen Einspannung werden jeweils rechts und links vom Aufhängungspunkt des Gewichtes Messungen vorgenommen, weshalb hier jeweils und das Elastizitätsmodul berechnet wird.

Die Länge und der Durchmesser des Stabes betragen diesmal:

0,54 m

0,01 m.

**Tabelle 3:** runder silberner Stab, beidseitige Einspannung (rechts)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 40 | 0,58 | 34,736 |
| 80 | 1,05 | 67,936 |
| 120 | 1,50 | 98,064 |
| 160 | 1,85 | 123,584 |
| 200 | 2,14 | 142,96 |

**Tabelle 4:** runder silberner Stab, beidseitige Einspannung (links)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 340 | 2,11 | 142,96 |
| 380 | 1,83 | 123,584 |
| 420 | 1,49 | 98,064 |
| 460 | 1,01 | 67,936 |
| 500 | 0,55 | 34,736 |

Beide Elastizitätsmodule werden wieder über eine lineare Regression, welche mit Python durchgeführt und mit Excel geplottet wird, bestimmt, indem gegen , bzw. , aufgetragen wird.

Abbildung 4: runder silberner Stab, beidseitige Einspannung (rechts)

Abbildung 5: runder silberner Stab, beidseitige Einspannung (links)

Für die linke Seite ergeben sich die Parameterwerte der linearen Regression zu:

m

Und für die rechte Seite zu:

m.

Die Elastizitätsmodule werden diesmal über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 13 ) |

berechnet. Die Masse beträgt

kg.

Das Flächenträgheitsmoment ist das selbe wie in (10), da der selbe Stab wie in 4.1 verwendet wird. Somit ergeben sich jeweils für rechts und links folgende Elastizitätsmodule:

.

Der Fehler zu wird hier ebenfalls über die Formel (11) berechnet.

**4.4 eckiger goldener Stab, beidseitige Einspannung**

Es wird analog wie in 4.3 vorgegangen. Die Länge und der Durchmesser des Stabes betragen:

0,54 m

0,01 m.

**Tabelle 5:** eckiger goldener Stab, beidseitige Einspannung (rechts)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 40 | 0,41 | 34,736 |
| 80 | 0,72 | 67,936 |
| 120 | 1,02 | 98,064 |
| 160 | 1,27 | 123,584 |
| 200 | 1.45 | 142,96 |

**Tabelle 6:** eckiger goldener Stab, beidseitige Einspannung (links)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [m] | [m] | [] |
| 340 | 1,44 | 142,96 |
| 380 | 1,25 | 123,584 |
| 420 | 1,0 | 98,064 |
| 460 | 0,69 | 67,936 |
| 500 | 0,38 | 34,736 |

Beide Elastizitätsmodule werden hier ebenfalls über eine lineare Regression, welche mit Python durchgeführt und mit Excel geplottet wird, bestimmt, indem gegen , bzw. , aufgetragen wird.

Abbildung 6: eckiger goldener Stab, beidseitige Einspannung (rechts)

Abbildung 7: eckiger goldener Stab, beidseitige Einspannung (links)

Für die linke Seite ergeben sich hier die Parameterwerte der linearen Regression zu:

m

Und für die rechte Seite zu:

m.

Die Elastizitätsmodule werden wieder über Formel (13) berechnet. Die angehängte Masse beträgt

kg.

Das Flächenträgheitsmoment entnehmen wir (12), da der selbe Stab wie in 4.2 verwendet wird.

Die beiden Elastizitätsmodule lauten:

(95,04

.

**5 Auswertung**

Die Abweichungen der errechneten Elastizitätsmodule vom Literaturwert für den runden silbernen Stab liegen bei 14%, 6,71% und 5,99%. Diese Abweichungen liegen innerhalb der Toleranz der Messgenauigkeit. Für den eckigen goldenen Stab betragen die Abweichungen vom Literaturwert: 13,7%, 15,9% und 14,7%. Ebenfalls liegen diese innerhalb der Toleranz der Messgenauigkeit.

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Versuch sehr anfällig für verfälschte Ergebnisse ist, da sich z.B. bei kleinsten Erschütterungen die Messuhren verstellen, oder da die Stäbe durch häufigen Gebrauch verbogen sind. Zudem könnte man beim Verschieben der Messuhren das Gewicht in der Mitte des Stabes verschieben, weshalb darauf zu achten ist, dieses nicht zu berühren oder es vor dem Ablesen der Werte wieder genau in die Mitte zu schieben. Die genannten Fehlerquellen können systematische Unsicherheiten hervorrufen.

Um genauere Ergebnisse zu bekommen sollte man den Versuch in einer Umgebung ohne viele Erschütterungen (wie z.B. durch vorbeilaufende Personen hervorgerufen) und mit neuen ungenutzten Stäben durchführen.

**6 Literatur**

[1] Anleitung zum Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe:

https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/982985/mod\_folder/content/0/V103%20Biegung%20elastischer%20St%C3%A4be.pdf?forcedownload=1

(Stand 28.11.2019)

[2] Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte:

https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt\_08\_flaechentraegheitsmomente\_bsp.pdf

(Stand 28.11.2019)

[3] Werte Elastizitätsmodule

https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1\_ge/kap\_7/illustr/t7\_1\_2.html

(Stand 28.11.2019)

1. [↑](#footnote-ref-1)